EJERCICIOS RESUELTOS DE INECUACIONES

1. Inecuación de primer grado con una incógnita:

$$\frac{x-2}{3}-\frac{5(x-7)}{4}>\frac{7-x}{2}$$

Solución:

$$\frac{x-2}{3}-\frac{5(x-7)}{4}>\frac{7-x}{2}\Rightarrow 4(x-2)-15(x-7)>6(7-x)\Rightarrow 4x-8-15x+105>42-6x\Rightarrow x<11\Rightarrow \boxed{x\in(-\infty,11)}$$

2. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

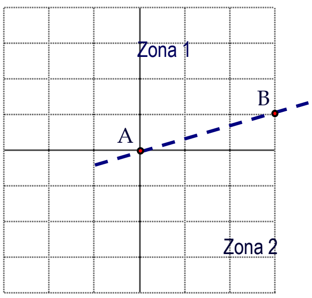
$$\frac{x}{2+\frac{1}{2}}>\frac{y}{3}\cdot\left(\frac{3}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

Solución:

- Lo primero que hacemos es simplificar la expresión que nos dan:

$$\frac{x}{2+\frac{1}{2}}>\frac{y}{3}\cdot\left(\frac{3}{1-\frac{1}{2}}\right)\Rightarrow\frac{2x}{3}>2y\Rightarrow x>3y$$

- Representamos gráficamente $x=3y$ y estudiamos en qué zona del plano, de las dos que determina la recta, se satisface la inecuación. Para ello obtenemos dos puntos cualesquiera de la recta. Obtenemos un punto A como sigue: Si x=0, entonces y=0, es decir A(0,0). Otro punto B puede ser éste: Si x=3 entonces y=1, es decir, B(3,1). Llevamos esto al plano:



- Elegimos un punto cualquiera de alguna de las dos zonas y lo llevamos a la inecuación para ver si la verifica. Tomamos, por ejemplo el punto C(0,1), perteneciente a la zona 1. En ese caso:

$$x>3y\Rightarrow 0>3\cdot 1$$

Esto es falso. Entonces, la solución de la inecuación es la zona 2. Además la recta no está contenida en la solución debido al signo $>$.

3. Inecuación de segundo grado con una incógnita:

$$(x-2)^2-4(2-3x)^2>0$$

Solución:

- Simplificamos esta ecuación de segundo grado, intentamos dejarla de la forma $ax^2+bx+c>0$.

$$(x-2)^2-4(2-3x)^2>0\Rightarrow x^2-4x+4-4\left(4-12x+9x^2\right)>0\Rightarrow x^2-4x+4-16+48x-36x^2>0\Rightarrow$$
$$35x^2-44x+12>0$$

- Descomponemos factorialmente el polinomio $35x^2-44x+12$ y para ello resolvemos la ecuación $35x^2-44x+12=0$

$$35x^2-44x+12=0 \Rightarrow x=\frac{-(-44)\pm\sqrt{(-44)^2-4\cdot 35\cdot 12}}{2\cdot 35}=\begin{cases} x_1=\frac{2}{5} \\ x_2=\frac{6}{7}\end{cases}$$

Entonces, la inecuación se puede escribir también así:

$$\left(x-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{6}{7}\right)>0$$

- Ahora discutimos el signo de cada factor para cada una de las tres regiones que determinan los puntos $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{7}$. Serán solución los intervalos que satisfacen al inecuación:

  Zona 1: los valores menores que $\frac{2}{5}$, **zona 2**: los valores comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{7}$ y **zona 3**: los valores mayores que $\frac{6}{7}$.

  Veamos en cuáles de estas tres zonas se satisface la inecuación:

	zona 1 Entre $-\infty$ y $\frac{2}{5}$	zona 2 Entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{7}$	zona 3 Entre $\frac{6}{7}$ y ∞
$\left(x-\frac{2}{5}\right)$	$-$	$+$	$+$
$\left(x-\frac{6}{7}\right)$	$-$	$-$	$+$
$\left(x-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(x-\frac{6}{7}\right)$	$+$	$-$	$+$

  La inecuación se satisface para la zona 2. Podemos comprobar que los puntos $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{7}$ no verifican la inecuación, ya que al sustituirlos en ésta obtenemos en ambos casos $0<0$.

Conclusión:

Sólo la zona 2 satisface la inecuación, es decir, la solución final es: $\boxed{x\in\left(\frac{2}{5},\frac{6}{7}\right)}$. El intervalo en abierto porque los extremos no están incluidos en la solución.

4. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4x-1}{3}-\frac{x}{2}\geq 5 \\ \frac{x-5}{3}+\frac{x}{2}>1\end{array}\right\}$$

Solución:

- Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales. El resultado final es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $\frac{4x-1}{3}-\frac{x}{2}\geq 5 \Rightarrow 8x-2-3x\geq 30 \Rightarrow 5x\geq 32 \Rightarrow x\geq\frac{32}{5} \Rightarrow x\in\left[\frac{32}{5},\infty\right)$

a.2 $\frac{x-5}{3}+\frac{x}{2}>1 \Rightarrow 2x-10+6x>6 \Rightarrow 8x>16 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x\in(2,\infty)$

Conclusión:

$$x\in\left[\frac{32}{5},\infty\right)\cup x\in(2,\infty) \Rightarrow \boxed{x\in\left[\frac{32}{5},\infty\right)}$$

5. Sistemas de inecuaciones no lineales con una incógnita

$$\left.\begin{array}{l} x-1\geq 0 \\ x^2<4 \end{array}\right\}$$

Solución:

- Se resuelve cada una de las dos inecuaciones que configuran el sistema. La solución del sistema es la intersección de ambas soluciones:

a.1 $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow x\in[1,\infty)$

a.2 $x^2<4 \Rightarrow x^2-4<0 \Rightarrow (x+2)(x-2)<0$

Resolvemos esta inecuación de 2º grado discutiendo en qué zonas se satisface. Las zonas vienen determinadas por los puntos -2 y 2.

	zona 1 Entre $-\infty$ y -2	zona 2 Entre -2 y 2	zona 3 Entre 2 y ∞
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)\cdot(x+2)$	$+$	$-$	$+$

La inecuación se satisface para la zona 2. Podemos comprobar que los puntos -2 y 2 no verifican la inecuación, ya que al sustituirlos en ésta obtenemos en ambos casos $0<0$.

La solución de la inecuación de segundo grado es $x\in(-2,2)$

Conclusión:

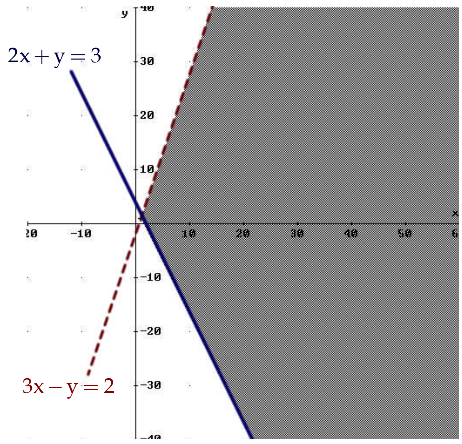
$x\in[1,\infty)\cap(-2,2) \Rightarrow \boxed{x\in[1,2)}$

6. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\geq 3 \\ 3x-y>2 \end{array}\right\}$$

Solución:

- Representamos gráficamente $2x+y=3$ y $3x-y=2$ en el mismo plano. Luego buscamos las regiones determinadas por las dos rectas que satisfacen el sistema.



Las dos inecuaciones tienen que verificarse simultáneamente. La única región del plano de las cuatro derterminadas por la intersección de las dos rectas es la sombreada.

Observa que en esa región del plano los puntos de la recta $2x+y=3$ sí están contenidos en la solución (trazo continuo), mientras que los puntos de la recta $3x-y=2$ en esa región solución no están incluidos (trazo discontinuo).

7. Inecuaciones racionales

$\frac{x-1}{1-3x} \le 0$

Solución:

- La inecuación dada se verifica siempre que el numerador y el denominador tienen signos distintos. Ello se verifica de dos modos distintos:

a) $\left.\begin{matrix} x-1 \le 0 \\ 1-3x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \le 1 \\ -3x > -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \le 1 \\ 3x < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \le 1 \\ x < \frac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

b) $\left.\begin{matrix} x-1 \ge 0 \\ 1-3x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \ge 1 \\ -3x < -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \ge 1 \\ 3x > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \ge 1 \\ x > \frac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_2 \in [1, \infty)$

- La solución final es la unión de x_1 y x_2, es decir, $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup [1, \infty)$

******